الترتيب
المجالات
القيمة المطلقة

السّـنة الدّراسـيّة 2009 - 2010

التّرتيب في مجموعة الأعداد الحقيقيّة

تعريف

a وَ b عددان حقيقيان.
القول إنّ a أكبر من b أو يساويه معناه $a-b$ عدد موجب.
نكتب : $a \geq b$ **معناه** $a-b \in \mathbb{R}^{+}$
القول إنّ a أصغر من b أو يساويه معناه $a-b$ عدد سالب.
نكتب : $a \leq b$ **معناه** $a-b \in \mathbb{R}^{-}$

ملاحظة :

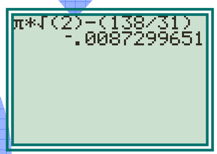
$a > b$ معناه $a-b \in \mathbb{R}^{+}$ وَ $a \neq b$.

تعريف

مقارنة عددين a وَ b معناه التّصريح بصحّة إحدى الحالات الثّلاث الآتية :

- $a < b$
- $a > b$
- $a = b$

تمرين تطبيقي ص.43 رقم19.



مبرهنة :

من أجل كلّ أعداد حقيقيّة a ، b ، c :
إذا كان $a \leq b$ وَ $b \leq c$ **فإنّ** $a \leq c$.

التّرتيب وعمليتيْ الجمع والضّرب

الترتيب وعمليّة الجمع

مبرهنة :

من أجل كلّ أعداد حقيقيّة a ، b ، c :
إذا كان $a \leq b$ **فإنّ** $a+c \leq b+c$.

مبرهنة :

من أجل كلّ أعداد حقيقيّة a ، b ، c ، d :
إذا كان $a \leq b$ وَ $c \leq d$ **فإنّ** $a+c \leq b+d$.

الترتيب وعمليّة الضّرب

مبرهنة :

a ، b ، c أعداد حقيقيّة.
من أجل $c > 0$ ، لدينا : $a \le b$ **يكافئ** $a \times c \le b \times c$.
من أجل $c < 0$ ، لدينا : $a \le b$ **يكافئ** $a \times c \ge b \times c$.

مبرهنة :

من أجل كلّ أعداد حقيقيّة موجبة a ، b ، c ، d :
إذا كان $a \le b$ و $c \le d$ **فإنّ** $a \times c \le b \times d$.

قواعد المقارنة

مبرهنة :

a ، b عددان حقيقيّان.
من أجل $a \ge 0$ و $b \ge 0$ لدينا : $a \le b$ **يكافئ** $a^2 \le b^2$.
من أجل $a \le 0$ و $b \le 0$ لدينا : $a \le b$ **يكافئ** $a^2 \ge b^2$.

مبرهنة :

a ، b عددان حقيقيّان موجبان.
لدينا : $a \le b$ **يكافئ** $\sqrt{a} \le \sqrt{b}$.

مبرهنة :

a ، b عددان حقيقيّان غير معدومين ومن نفس الإشارة.
لدينا : $a \le b$ **يكافئ** $\frac{1}{a} \ge \frac{1}{b}$.

أي : $a \le b \quad \rightleftarrows \quad \frac{1}{a} \ge \frac{1}{b}$

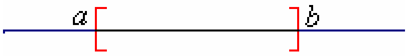
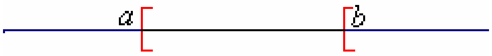
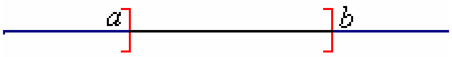
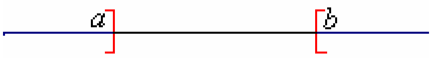
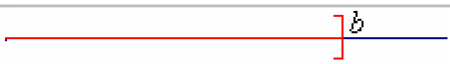
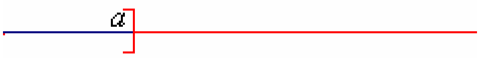
مبرهنة :

a عدد حقيقيّ.
إذا كان $0 \le a \le 1$ **فإنّ** $a^3 \le a^2 \le a$.
إذا كان $a \ge 1$ **فإنّ** $a^3 \ge a^2 \ge a$.

ملاحظة :
يمكن تعميم ترتيب قوى عدد حقيقي موجب a كما يلي :
إذا كان a محصورا بين 0 و 1 فإنّ قوى a ترتّب ترتيبا تنازليّا.
إذا كان a أكبر من 1 فإنّ قوى a ترتّب ترتيبا تصاعديّا.

المجالات

تعاريف

المجال الذي يرمز إليه بـ ...	هو مجموعة الأعداد الحقيقيّة x حيث ...	يُمثّل على المستقيم العددي بالشّكل ...
$[a\ ;b]$	$a \le x \le b$	
$[a\ ;b[$	$a \le x < b$	
$]a\ ;b]$	$a < x \le b$	
$]a\ ;b[$	$a < x < b$	
$]-\infty\ ;b]$	$x \le b$	
$]-\infty\ ;b[$	$x < b$	
$[a\ ;+\infty[$	$x \ge a$	
$]a\ ;+\infty[$	$x > a$	

تقاطع وإتحاد مجالين

تقاطع مجالين I وَ J هو مجموعة الأعداد الحقيقيّة التي تنتمي إلى I وَ J .
الرّمز : $I \cap J$
إتحاد مجالين I وَ J هو مجموعة الأعداد الحقيقيّة التي تنتمي إلى I أو J .
الرّمز : $I \cup J$

عناصر المجال $[a;b]$ هي :

مركزه $c = \dfrac{a+b}{2}$ **طوله** $l = b-a$ **نصف قطره** $r = \dfrac{b-a}{2}$

الحصر

تعريف

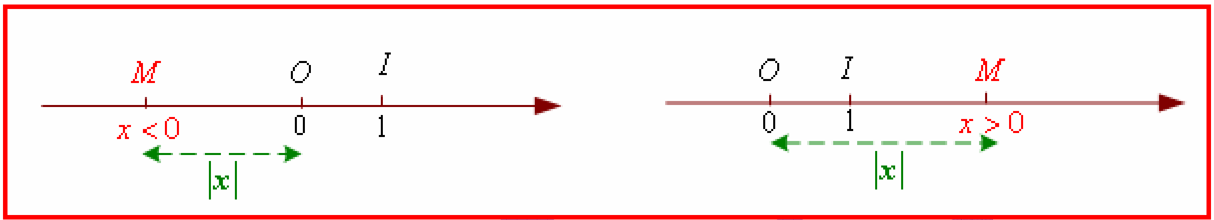
حصر عدد حقيقي x يعني إيجاد عددين a وَ b بحيث $a \le x \le b$

القيمة المطلقة والمسافة

القيمة المطلقة لعدد حقيقي

تعريف

x عدد حقيقيّ، M نقطة من مستقيم مزوّد بمعلم (O,I) فاصلتها x.
القيمة المطلقة للعدد x هي المسافة OM.
الرّمز : $|x|$. نكتب : $|x| = OM$.



نتائج :

بما أنّ المسافة موجبة فإنّ $|x| \geq 0$ من أجل كلّ عدد حقيقي x.
لكلّ عدد حقيقي x : $|x| = x$ إذا كان $x \in [0;+\infty[$.
$|x| = -x$ إذا كان $x \in]-\infty;0]$.

خواص :

x وَ y عددان حقيقيّان. لدينا :

$|-x| = |x|$ $\quad$ $\sqrt{x^2} = |x|$ $\quad$ $|x \times y| = |x| \times |y|$ $\quad$ $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ مـــع $y \neq 0$

$|x+y| \leq |x| + |y|$ (المتباينة المثلثيّة).

ملاحظة :
المتباينة المثلثيّة تصبح $|x+y| = |x| + |y|$ عندما يكون العددان x وَ y من نفس الإشارة.

المسافة بين نقطتين

مبرهنة

إذا كانت A ، B نقطتين من مستقيم مزوّد بمعلم (O,I) فاصلتاهما a وَ b على الترتيب فإنّ $AB = |b-a|$

إذن : $AB = |a-b| = |b-a|$

المسافة بين عددين حقيقيين

تعريف

المسافة بين عددين حقيقيين a وَ b هي العدد $|b-a|$.
نكتب : $d(a\,;b) = |a-b| = |b-a|$

القيمة المطلقة ـ المسافة ـ المجال وَ الحصر

مبرهنة

c عدد حقيقي، r عدد حقيقي موجب.
لكلّ عدد حقيقي x ، $|x-c|\le r$ **يعني** $x\in[c-r\,;c+r]$.

نتيجة :

c عدد حقيقي، r عدد حقيقي موجب.
لكلّ عدد حقيقي x ، $|x-c|\le r$ **(في صيغة قيمة مطلقة)**
يعني $d(x;c)\le r$ **(في صيغة مسافة)**
يعني $x\in[c-r\,;c+r]$ **(في صيغة مجال)**
يعني $c-r\le x\le c+r$ **(في صيغة حصر)**

أي :

$$\boxed{|x-c|\le r} \rightleftarrows \boxed{d(x;c)\le r} \rightleftarrows \boxed{x\in[c-r\,;c+r]} \rightleftarrows \boxed{c-r\le x\le c+r}$$

القيم المقرّبة لعدد حقيقي.

تعريف

a عدد حقيقي، d عدد عشري، n عدد طبيعي.
القول إنّ d قيمة مقرّبة عشريّة إلى 10^{-n} للعدد a يعني أنّ المسافة من a إلى d أصغر من 10^{-n} أي $|a-d|\le 10^{-n}$.